Matematika 10

neptun kódhoz közelebb eső a kiszéháé, a távolabb eső a nagy zéhá pontja...

Holnap 15:30-16:45 II-es ea.

1+7 az ugye 8... május 8-án kedden az előadás első 10 percében megírjuk a második kis-zárthelyit, ez 15 pontot fog érni, 3 db példa lesz, rendkívül egyszerű...

lesz benne igaz-hamis... Amire azt gondoljuk, hogy igaz, írjuk mellé, hogy igaz, amire azt, hogy hamis, írjunk mellé, hogy hamis... mert kaptam egy e-mailt, amelyben valaki nem tudta, hogy jelölje....

kettő példa... szó szerint, mert szó szerint ugyanaz lesz a kis-zéhában... és ha ugyanaz lesz a nagy-zéhában, illik nem elrontani....

a mai előadás anyaga szintén fent van a honlapon... nézzük meg... a végeredményét kellene igazán megjegyezni..

Speciális eloszlások, várató érték, szórás.... Meg kell jegyezni, c'est la vie...

Várható érték

Jel: E

$X:\Omega\rightarrow\mathbb{R}$ valószínűségi változó folytonos

Diszkrét $E(X)$

x érték $x_1, x_2 \ldots$

$p_k = P(X = x_k)$

$E(X) = \sum_k x_k\, p_k$

ha $\sum |x_k|\, p_k$ konvergens...

feltételesen konvergens....

$E(X) = \int_{\infty}^{\infty} x\, f_x(x)\mathrm{dx}\,\mathrm{ha}\int_{-\infty}^{\infty} |x|\, f(x)\mathrm{dx}\,\mathrm{konv}\ldots.$

Tétel

$X:\Omega\rightarrow\mathbb{R}\,\mathrm{vv}\,\&\, t.f.h.\,\exists E(x)$

ekkor $E(\alpha x^2 + \beta x + \gamma) = \alpha E(x^2) + \beta E(x) + \gamma, \mathrm{ha}\,\exists E(x^2) \wedge \alpha; \beta; \gamma \in \mathbb{R}$

$E(x^2) = \begin{cases} \mathrm{diszkr} \sum x_k^2\, p_k \\ \mathrm{folyt} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x)\mathrm{dx} \end{cases}$

Szórás:

Jele: D

$D(X) = \sqrt{E((X - E(X))^2)}$

$D^2(X) = E((X - E(X))^2 = E(X^2 - 2\,X\,E(X) + (E(X))^2) = E(X^2) - (E(X))^2 = \mathrm{Var}(X)$

(negyven évig N-nel jelöltük a várható értéket, ezt el fogom rontani...)

Példák:

Példa1

$X: \Omega \to \mathbb{R} v.v.$

eloszlásfüggvény: $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq -1 \\ \frac{1}{12} & \text{ha} \quad -1 < x \leq 3 \\ \frac{8}{12} & \text{ha} \quad 3 < x \leq 5 \\ 1 & \text{ha} \quad 5 < x \end{cases}$ (ez diszkrét valószínűség lesz, mer lépcsős...)

$E(X) = ?$

$D(X) = ?$

$F(-1) = 0$

$P(X < -1) = 0$

$F(\underset{\varepsilon \to 0_+}{-1 + \varepsilon}) = \frac{1}{12}$

$P(X < -1 + \varepsilon) = \frac{1}{12}$

X értékei	-1	3	5
valószínűség	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{12}$
magyarázat	-	$\frac{8}{12} - \frac{1}{12}$	$1 - \frac{8}{12}$

$F(2,5) = F(3) = \frac{1}{12}$;

$F(3 + \varepsilon) = \frac{8}{12}$

$E = -1\,\frac{1}{12} + 3\,\frac{7}{12} + 5\,\frac{4}{12} = \frac{40}{12}$

$D^2(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \left(1\,\frac{1}{12} + 9\,\frac{7}{12} + 25\,\frac{4}{12}\right) - \left(\frac{40}{12}\right)^2$

X^2 értékei:	1	9	25
valószínűség:	$\frac{1}{12}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{4}{12}$

Példa2

$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha} \quad x \leq -2 \\ a & \text{ha} \quad -2 < x \leq 0 \\ 1 - x & \text{ha} \quad 0 < x \leq 1 \\ 0 & \text{ha} \quad 1 < x \end{cases}$

1. kérdés: Létezik-e olyan a ahol f sűrűségfüggvény lehet?

ha az, akkor $\int\limits_{-\infty}^{\infty} = 1$

$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{dx} = \cancel{\int\limits_{-\infty}^{-2} 0\mathrm{dx}} + \int\limits_{-2}^{0} a\,\mathrm{dx} + \int\limits_{0}^{1} (1 - x)\mathrm{dx} + \cancel{\int\limits_{1}^{\infty} 0\mathrm{dx}} = [a\,x]_{-2}^{0} + [x - \frac{x^2}{2}]_0^1 =$

$= 0 - (-2\,a) + (1 - \frac{1}{2}) - (0) = 2\,a + \frac{1}{2} = 1$

$\Rightarrow a = \frac{1}{4}$

Ha az a-ra negatív szám jön ki, akkor sem lehet sűrűségfüggvény, mer hát az olyan nemnegatív minden $x \in D_f$-re

$\Longrightarrow$

$$f(x)=\begin{cases}0 & \text{ha} & x\le -2\\ \frac{1}{2} & \text{ha} & -2\le x\le 0\\ 1-x & \text{ha} & 0<x\le 1\\ 0 & \text{ha} & 1<x\end{cases}$$

$$E(X)=\int\limits_{-\infty}^{-2}\cancel{x\,0}\mathrm{dx}+\int\limits_{-2}^{0}x\,\frac{1}{4}\mathrm{dx}+\int\limits_{0}^{1}x\,(1-x)\mathrm{dx}+\int\limits_{1}^{\infty}\cancel{x\,0}\mathrm{dx}=\left[\frac{1}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{0}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{1}=$$

$$=0-\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-0=-\frac{1}{3}$$

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x}f(t)\,\mathrm{dt}$$

$$F(3)=\int\limits_{-\infty}^{3}f(t)\,\mathrm{dt}=\int\limits_{-\infty}^{-2}0+\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{dt}+\int\limits_{0}^{1}(1-t)\,\mathrm{dt}+\int\limits_{1}^{3}0\,\mathrm{dt}=1$$

...elvégre sűrűségfüggvény

$$F\left(\frac{1}{2}\right)=\int\limits_{-\infty}^{-2}0\,\mathrm{dt}+\int\limits_{-2}^{0}\frac{1}{4}\mathrm{dt}+\int\limits_{0}^{\frac{1}{2}}(1-t)\,\mathrm{dt}$$